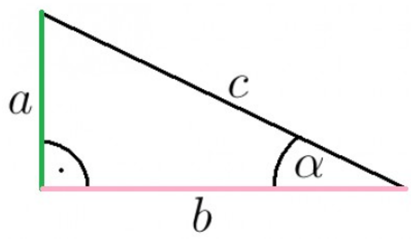
TRYGONOMETRIA – lekcja 1.

Temat: *Określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.*

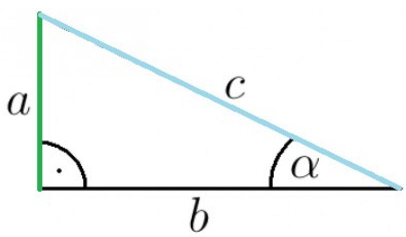
Definicja

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek (iloraz) długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie.



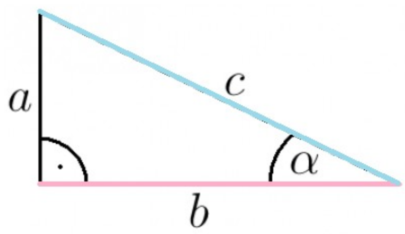
$$tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek (iloraz) długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.



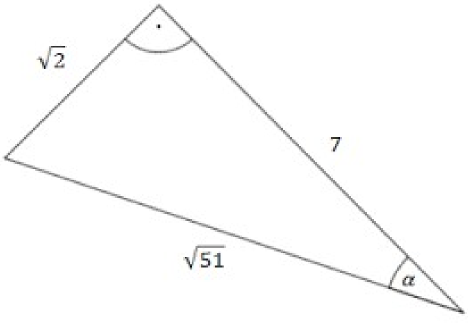
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek (iloraz) długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej.



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Przykład:



Przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta α ma długość $\sqrt{2}$, przyprostokątna leżąca przy kącie α ma długość 7, a przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{51}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym określamy wartość wszystkich funkcji trygonometrycznych. Otrzymujemy:

$$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$sin\ \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{51}} \cdot \dfrac{\sqrt{51}}{\sqrt{51}} = \dfrac{\sqrt{102}}{51}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{7}{\sqrt{51}} = \dfrac{7}{\sqrt{51}} \cdot \dfrac{\sqrt{51}}{\sqrt{51}} = \dfrac{7\sqrt{51}}{51}$

Zadania

6.1. d) Obliczamy długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α. Korzystamy w tym celu z twierdzenia Pitagorasa:

$8^2 + x^2 = 12^2$
$64 + x^2 = 144$
$x^2 = 144 - 64$
$x^2 = 80 \qquad / \sqrt{}$ $\qquad$ *(z obu stron równania wyciągamy pierwiastek)*
$x = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$
$x = 4\sqrt{5}$

Jak mamy długości wszystkich boków trójkąta prostokątnego, to korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych i obliczamy ich wartości.

$tg\ \alpha = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{4 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad$ $sin\ \alpha = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{4\sqrt{5}}{12} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

6.1. f) Obliczamy długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α. Korzystamy w tym celu z twierdzenia Pitagorasa:

$a^2 + x^2 = (2a)^2$
$a^2 + x^2 = 4a^2$
$x^2 = 4a^2 - a^2$
$x^2 = 3a^2 \qquad / \sqrt{}$ $\qquad$ *(z obu stron równania wyciągamy pierwiastek)*
$x = \sqrt{3}a$

Jak mamy długości wszystkich boków trójkąta prostokątnego, to korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych i obliczamy ich wartości.

$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $sin\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

6.2. c) Mamy obliczyć nieznana długość boku oznaczoną jako x. Wykorzystamy w tym celu funkcje trygonometryczne. Aby dobrze wybrać funkcję z której będziemy korzystać, należy zaobserwować jakie długości boków trójkąta prostokątnego są dane. W tym przypadku mamy kąt 13°, przyprostokątną leżącą naprzeciwko kąta 13° oraz przeciwprostokątną. O tych dwóch wielkościach mówi sinus.

Wobec tego: $sin\ 13^o = \dfrac{4}{x}$

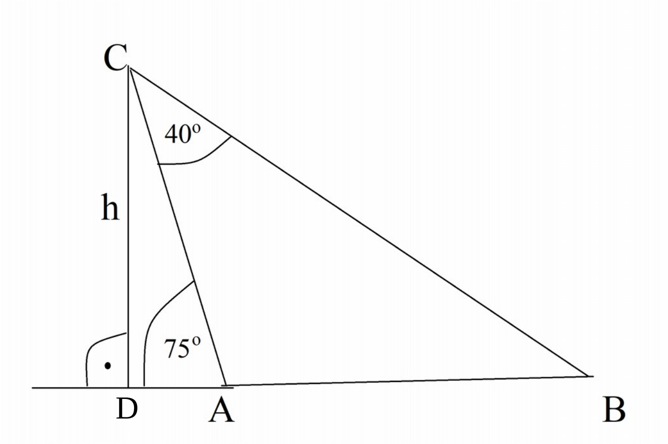
Z tabeli odczytujemy przybliżoną wartość funkcji sinus dla kąta 13° (tabela obok) i mamy:

$0{,}225 = \dfrac{4}{x} \qquad / \cdot x$

$0{,}225x = 4 \qquad /:0{,}225$
$x = 17{,}(7)$
$x \approx 17{,}8.$

α[°]	sin α / cos β	tg α	β[°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73

6.4. e)



h = 6 cm

$\sin 75^o = \frac{h}{|AC|}$ Odczytujemy z tabeli wartość sin 75º i podstawiamy

$0{,}966 = \frac{6}{|AC|}$, $|AC| = 6 : 0{,}966 \approx 6{,}2$

$tg\, 75^o = \frac{h}{|AD|}$ Odczytujemy z tabeli wartość tg 75º i podstawiamy

$3{,}732 = \frac{6}{|AD|}$, $|AD| = 6 : 3{,}732 \approx 1{,}6$

Z własności kątów przyległych obliczamy, że |∢BAC| = 180º-75º = 105º.
Z sumy miar katów wewnętrznych w trójkącie obliczamy, że |∢CBA| = 180º-105º -40º= 35º.

$\sin 35^o = \frac{h}{|BC|}$ Odczytujemy z tabeli wartość sin 35º i podstawiamy

$0{,}574 = \frac{6}{|BC|}$, $|BC| = 6 : 0{,}574 \approx 10{,}5$

$tg\, 35^o = \frac{h}{|BD|}$ Odczytujemy z tabeli wartość tg 35º i podstawiamy

$0{,}7 = \frac{6}{|BD|}$, $|BD| = 6 : 0{,}7 \approx 8{,}6$

Obw $_{\Delta ABC}$ = |AB| + |AC| + |BC| , |AB| = |BD| - |AD| = 8,6-1,6 = 7

Obw $_{\Delta ABC}$ = 7+6,2+10,5 = 23,7 cm.

<u>Zadanie domowe</u>

1. 6.1 a, b, c, e
2. 6.2 a, b, c
3. 6.4 a, c, d